Theoretische Physik II – Quantenphysik I

Vorlesung SS 2005 von Prof. Dr. Lechtenfeld

Mitschrift von Andreas Schulz

<u>Seite</u>	<u>Inhalt</u>	
<u>01</u>	**<u>I Photonen (Polarisation)</u>**	
<u>01</u>	<u>a) klassisches Licht</u>	
01	Gesamtenergie im Volumen *V*	(1.1)
<u>02</u>	<u>b) Photon-Zustand</u>	
02	Zustandsvektoren der Phasenpolarisation	(1.2)
03	adjungierter Vektor – Bra	(1.3)
03	Skalarprodukt aus Kets	(1.4)
04	Wahrscheinlichkeit (filterpassierndeder Photonen)	(1.5)
<u>04</u>	<u>c) Helizität und Drehimpuls</u>	
04	Drehimpuls – Welle	(1.6)
05	Drehimpuls – Photon	(1.7)
<u>06</u>	<u>d) Operatoren und Eigenwerte</u>	
06	Eigenzustände eines Operators	(1.8)
06	Eigenkets	(1.9)
06	Helizitätsoperator	(1.10)
07	äußeres/dyadisches Produkt	(1.11)
07	Projektionsoperator	(1.12)
07	Summe der Basisvektoren = Identität	(1.13)
<u>08</u>	<u>e) Amplituden – Mechanik</u>	
<u>08</u>	<u>f) Gemische</u>	
09	klassische Wahrscheinlichkeitsaddition	(1.14)
10	Trick	(1.15)
10	Dichtematrix	(1.16)
10	allgemein	(1.17)
11	Eigenschaften	(1.18)
<u>11</u>	<u>g) Doppelbrechung</u>	
11	Effekt des Calcits	(1.19)
11	U_z	(1.20)
12	Phasenänderung im Kristall	(1.21)
12	U_z ist multiplikativ	(1.22)
12		(1.23)
12	Wellenzahl-Operator	(1.24)
12	Dgl.	(1.25)
13	Lösung	(1.26)
13	U unitär	(1.27)
13	K hermetisch	(1.28)

I. Photonen (Polarisation)

a) klassisches Licht

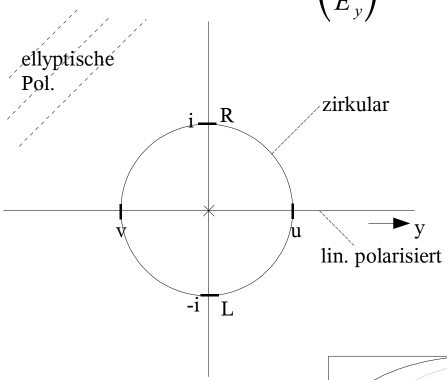
Lichtwelle propagiert in Z-Richtung

$$\vec{E}(\vec{r},t) \doteq \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ 0 \end{pmatrix} e^{ikz-i\omega t} \quad \text{mit} \quad k^2=\omega^2 \quad \text{und} \quad E_x, E_y \in \mathbb{C}$$

$\vec{E}(\vec{r},t) \doteq$ hat Komponenten in geeigneter Basis

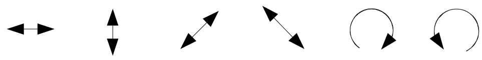
$\vec{B}(\vec{r},t)=\vec{e}_z \times \vec{E}(\vec{r},t)$ Heaviside–Einheiten $\mu_0=\varepsilon_0=\mathbf{1}$

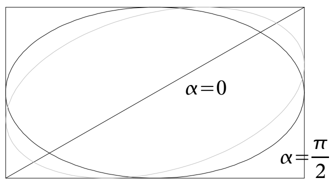
Polarisationsvektor $\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix}$, charakterisiert durch $p=\frac{E_y}{E_x}=e^{\varepsilon+i\alpha} \in \mathbb{C}$



Spezialfälle:

0	∞	1	-1	i	$-i$
$'x'$	$'y'$	$'u'$	$'v'$	$'R'$	$'L'$





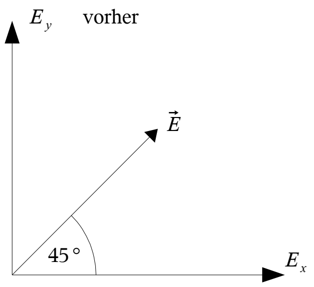
Energiedichte: $$w(\vec{r},t)=\frac{1}{2}\left(|\Re\,\vec{E}(\vec{r},t)|^2+|\Re\,\vec{B}(\vec{r},t)|^2\right)=|\Re\,E(\vec{r},t)|^2$$

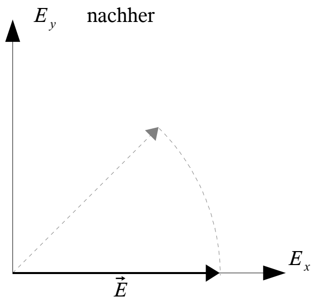
$$=|E_x|^2\cos^2(kz-\omega t+\alpha_x)+|E_y|^2\cos^2(kz-\omega t+\alpha_y)$$

Gesamtenergie im Volumen V:

$$\mathrm{E}(t)=\int_V d^3r \;\; w(\vec{r},t)=\frac{1}{2}V\left(|E_x|^2+|E_y|^2\right)=\frac{1}{2}V|\vec{E}|^2 \tag{1.1}$$

Polfilter: betrachte u-Welle (p=1), lasse sie durch x-Filter (p=0) treten





$\mathrm{E}=\frac{1}{2}V\cdot 2|E_x|^2 \;\Rightarrow\; \mathrm{E}=\frac{1}{2}V|E_x{}^2|$ Energie halbiert

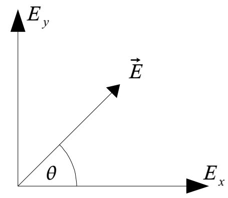
b) Photon-Zustand

Quanten-Input.: Lichtwelle besteht aus einer großen Anzahl N identischer Photonen mit Energie $\hbar\omega$

demnach $\mathrm{E}=N\hbar\omega \overset{\text{Filter}}{\rightarrow} \frac{1}{2}N\hbar\omega$ 50% der Photonen passieren

Interpretation: jedes Photon hat 50% Passierwahrscheinlichkeit

Korrespondensprinzip: klass. Grenzfall für $N\rightarrow\infty$, mit $\frac{\Delta N}{N} \sim \frac{1}{\sqrt{N}} \rightarrow 0$



bisher W. Eines x-Filters für linear pol. Photonen

$$W_x=\frac{|E_x|^2}{|\vec{E}|^2}=\frac{|E_x|^2}{|E_x|^2+|E_y|^2}=\cos^2\theta \quad \text{für} \quad p=\tan\theta$$

analog für zirkularen Polfilter, z.B. ein R-Filter:

alte Basis: $(\vec{e}_x,\vec{e}_y)$, neue Basis: $(\vec{e}_R,\vec{e}_L)$ mit $\vec{e}_R=\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_x+i\,\vec{e}_y)$, $\vec{e}_L=\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_x-i\,\vec{e}_y)$

neue Komponenten E_R, E_L über

$$\vec{E}=E_x\vec{e}_x+E_y\vec{e}_y=E_R\vec{e}_r+E_L\vec{e}_L$$

$$\Rightarrow E_R=\frac{1}{\sqrt{2}}(E_x-i\,E_y),\,E_L=\frac{1}{\sqrt{2}}(E_x+i\,E_y)$$

$$W_R=\frac{|E_R|^2}{|\vec{E}|^2}=\frac{\left|\frac{1}{\sqrt{2}}(E_x-i\,E_y)\right|^2}{|\vec{E}|^2}=\frac{1}{2}\frac{\left||\vec{E}|\cos\theta-i|\vec{E}|\sin\theta\right|^2}{|\vec{E}|^2}$$

$$=\frac{1}{2}|\cos\theta-i\sin\theta|^2=\frac{1}{2}\left|e^{-i\theta}\right|^2=\frac{1}{2} \qquad \text{für linear polarisiertes Licht}$$

Beschreibung der Zustände einzelner Photonen

$$\mathrm{E}=N\hbar\omega=\frac{1}{2}\nu|\vec{E}|^2 \overset{N=1}{\rightarrow} \mathrm{E}=\hbar\omega=\frac{1}{2}\nu|\vec{E}|^2$$

definiere Zustandsvektoren der Phasenpolarisation:

$$\left|\psi\right\rangle \doteq \begin{pmatrix}\psi_x\\ \psi_y\end{pmatrix}=\sqrt{\frac{\nu}{2\hbar\omega}}\begin{pmatrix}E_x\\ E_y\end{pmatrix} \in\mathbb{C} \quad \text{so dass} \quad |\psi_x|^2+|\psi_y|^2=1 \qquad (1.2)$$

Bemerkung 1: vorher $p\in\mathbb{C}$:jetzt $\left|\psi\right\rangle\in S^3$

Redundanz in $\left|\psi\right\rangle$ ist Phase $\left|\psi\right\rangle\sim e^{i\varphi}\left|\psi\right\rangle$

Bemerkung 2: Normierung in $|\psi_x|^2+|\psi_y|^2=1$ unverträglich mit Superpos.-Prinzip

muss beim Addieren noch mehr Redundanz zulassen:

$\left|\psi\right\rangle\sim\lambda\left|\psi\right\rangle$ mit $\lambda\in\mathbb{C}$ $\left|\psi\right\rangle$ modulo λ-Multiplikation ist ein Strahl

Beispiele: $|x\rangle \doteq \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $|y\rangle \doteq \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

(xy-Basis) $|u\rangle \doteq \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $|v\rangle \doteq \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$

$|R\rangle \doteq \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}$, $|L\rangle \doteq \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-i\end{pmatrix}$

definiere <u>adjungierten</u> Vektor: $\langle\psi| :\doteq \underbrace{(\psi_x^*, \psi_y^*)}_{\text{heißt 'Bra'}}$ (1.3)

definiere Skalarprodukt: aus Kets $|\psi\rangle, |\phi\rangle$ bilde $|\psi\rangle, \langle\phi|$

$$\langle\phi|\psi\rangle := (\phi_x^*, \phi_y^*)\begin{pmatrix}\psi_x\\ \psi_y\end{pmatrix} = \phi_x^*\psi_x + \phi_y^*\psi_y = \langle\psi|\phi\rangle^* \tag{1.4}$$

$\mathbb{C}^2$ als definierter Vektorraum

Normierung von $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{\langle\psi|\phi\rangle}}$ $\langle\psi|\psi\rangle = 1$

Zerlegung eines Zustands in Basis: $|x\rangle\psi_x + |y\rangle\psi_y \overset{\text{oder}}{=} |R\rangle\psi_R + |L\rangle\psi_L$

Koeffizienten durch Projektion:

$$\langle x|\psi\rangle = \underbrace{\underbrace{\langle x|x\rangle}_{1}\psi_x + \underbrace{\langle x|y\rangle}_{0}\psi_y}_{\psi_x} \overset{\text{oder}}{=} \langle x|R\rangle\psi_R + \langle x|L\rangle\psi_L$$

aber $|\psi\rangle = |x\rangle\langle x|\psi\rangle + |y\rangle\langle y|\psi\rangle$

allgemein $|x\rangle\langle x| + |y\rangle\langle y| = 1$

analog $|\psi\rangle = |R\rangle\langle R|\psi\rangle + |L\rangle\langle L|\psi\rangle$

Polfilter: $|\psi\rangle = |x\rangle\langle x|\psi\rangle + |y\rangle\langle y|\psi\rangle$

$\downarrow$ x-Filter projitzieren

$|\psi'\rangle = |x\rangle\langle x|\psi\rangle$

$\downarrow$ normieren

$|\psi''\rangle = |x\rangle$

WdH: Polarisationsfilter wirken wie Projektoren:

x-Filter: $|\psi\rangle = |x\rangle\langle x|\psi\rangle + |y\rangle\langle y|\psi\rangle$

$\downarrow$

$|\psi'\rangle = |x\rangle\langle x|\psi\rangle \overset{\text{Normierung}}{\Rightarrow} |\psi''\rangle = |x\rangle$

Passierwahrscheinlichkeit: $W_x = \frac{|\psi|^2}{|\psi_x|^2 + |\psi_y|^2} = |\psi_x|^2$

$\langle x|\psi\rangle\ldots$ Amplitude

$\Rightarrow$ Wahrsch. $=$ |Amplitude|^2

Vergl. Intens.= - " -

$|R\rangle$ - Filter $\qquad W_R=|\langle R|\psi\rangle|^2$

Allgemein: Filter Photonen $|\phi\rangle$ passieren

$$\Rightarrow \qquad W_\phi(|\phi\rangle)=|\langle\phi|\psi\rangle|^2 \tag{1.5}$$

c) <u>Drehimpuls und Helizität</u>

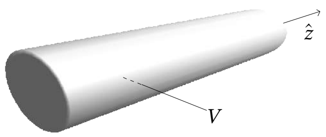
Quanten Input: Drehimpuls einer Lichtwelle = Σ Drehimpuls Photonen

Experiment: Helizität = Drehimpuls || Bewegungsrichtung $\left(\sim \vec L\cdot\vec P\right)$
$= \pm\hbar$

klassische EM-Welle in $\hat z$- Richtung

$$\vec L=\frac{1}{c}\int d^3r\ \ \vec r\times\left(\vec E\times\vec B\right)$$

∞-ausgedehnt: $\vec E\times\vec B\ \sim\ \hat e_z$



$$\vec E\times\vec B|_{\partial V}\,\psi\,\hat e_z$$

Rechnung: $\vec\nabla\vec E=0 \qquad \vec B=\vec\nabla\times\vec A\ \ ,\ \ \vec E=-\frac{1}{c}\partial_t\vec A \qquad (\phi=0\text{-Eichung})$

$$\vec L=\frac{1}{c}\int d^3r\ \ \vec r\times\left(\vec E\times\left(\vec\nabla\times\vec A\right)\right)=\frac{1}{c}\int d^3r\ \ \vec r\times\left(E_m\vec\nabla A_m-E_m\partial_m\vec A\right)$$

p.Int.
$$=\frac{1}{c}\int d^3r\ \left[E_M\left(\vec r\times\vec\nabla\right)A_m\ -\ \partial_m\left(E_m\vec r\times\vec A\right)\ +\ \partial_m\left(E_m\vec r\times\vec A\right)\ +\ E_m\underbrace{\partial_m\vec r}_{\vec e_m}\times\vec A\right]$$

$$=\frac{1}{c}\int d^3r\left[\underbrace{\vec E\times\vec A}_{\substack{\text{'Spin'}\\ \sim V}}+\underbrace{E_m\left(\vec r\times\vec\nabla\right)A_m}_{\substack{\text{'Orbital'}\\ \sim\partial V}}\right.$$

z-Komponente: $\left(\vec r\times\vec\nabla\right)_z=x\,\partial_y-y\,\partial_x=\partial\varphi\ \sim\ e^{ikz}$

$$L_z\overset{\text{V groß}}{=}\frac{1}{c}\int_V d^3r\left(\vec E\times\vec A\right)_z \tag{1.6}$$

Welle(n paket) in $\hat{z}$ - Richtung

$$\vec{E}(\vec{r},t)=\begin{pmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\end{pmatrix}e^{i(kz-\omega t)}$$

$$\vec{A}(\vec{r},t)=\underbrace{\frac{c}{\omega}\begin{pmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix}a_x\\ a_y\end{pmatrix}}e^{i(kz-\omega t)}$$

$$L_z=\frac{1}{c}\int_V d^3r\ \left[\Re(E_x)\Re(A_y)-\Re(E_y)\Re(A_y)\right]$$

$$e^{i(kz-\omega t)}=e^{i\alpha}\quad =\frac{1}{4}\frac{1}{c}\int_V d^3r\left[\left(\varepsilon_x e^{i\alpha}+\varepsilon_x^* e^{-i\alpha}\right)\left(a_y e^{i\alpha}+a_y^* e^{i\alpha}\right)\ -\ ('x\Leftrightarrow y')\right]$$

$$\int_V d^3r\ \ e^{ik\alpha}=e^{-i\omega tn}2\pi R\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}dz\ \ e^{ikzn}=\frac{V}{k}\delta_{0,n}$$

$$=\frac{V}{2i\omega}\left(\varepsilon_x^*\varepsilon_y-\varepsilon_x\varepsilon_y^*\right)\quad\Bigg|_{\substack{\varepsilon_x=\frac{1}{\sqrt{2}}(E_R+E_L)\\ \varepsilon_y=\frac{1}{\sqrt{2}}(E_R+E_L)}}$$

$$\Rightarrow\quad =\frac{V}{2\omega}\left(|E_R|^2-|E_L|^2\right)$$

Zustandsvektor: (siehe 1.2) $\quad|\psi\rangle$

$$E_{L,R}=\sqrt{\frac{2\hbar\omega}{V}}\psi_{L,R}\qquad \text{für ein Photon}$$

$$\Rightarrow L_z=\hbar\left(|\psi_R|^2-|\psi_L|^2\right)$$

$$=\hbar\left(|\langle R|\psi\rangle|^2-|\langle L|\psi\rangle|^2\right)\qquad(1.7)$$

Exp.: Helizität $=\pm\hbar$

Quanteninterpretation

(1.7)= (quantenmech.) Erwartungswert (Mittelwert) für viele identische Messungen

Erinnerung: $(A)=\sum \underbrace{a_i}_{\substack{\text{(mögl.)}\\ \text{Messwete}}}\ \underbrace{W(a_i)}_{\substack{\text{Wahrsch.}\\ \text{(rel Häufigkeit)}\\ a_i\ \text{gemessen}}}$

hier: $(L_z)=+\hbar W(+\hbar)+(-\hbar)W(-\hbar$

$$W(+\hbar)=|\langle R|\psi\rangle|^2\ ,\ \ W(-\hbar)=|\langle L|\psi\rangle|^2\qquad |\psi\rangle=|R\rangle\langle R|\psi\rangle+|L\rangle\langle L|\psi\rangle$$

Summe der Wahrscheinlichkeiten

$$W(+\hbar)+W(-\hbar)=\ldots=\langle R|\psi\rangle\langle\psi|R\rangle+\langle L|\psi\rangle\langle\psi|L\rangle=1$$

$|\psi\rangle=|R\rangle \;\Rightarrow\;$ Heliz.$=+\hbar$ $\qquad\qquad$ $|\psi\rangle=|L\rangle \;\Rightarrow\;$ Heliz.$=-\hbar$

d) Operatoren, Eigenwerte

Erwartungswerte, Projektoren

Was zeichnet $|R\rangle, |L\rangle$ bezüglich L_z aus?

⇒ Eigenzustände eines Operators $S:\mathbb{C}^2\to\mathbb{C}^2$ [lineare Abb. In $\mathbb{C}^2$]

$$\left.\begin{matrix} S|R\rangle=+1|R\rangle \\ S|L\rangle=+1|L\rangle \end{matrix}\right\}\text{Matrixdarstellung}\, S \doteq \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} \tag{1.8}$$

$|x\rangle, |y\rangle$ Basis

$$S=\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} |R\rangle \doteq \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \\ |L\rangle \doteq \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \end{matrix}$$

S erzeugt Rotationen um $\hat{z}$ - Achse

$$\begin{aligned} e^{i\theta S} &= \left(S^2=\mathbf{1}\right)=\mathbf{1}+i\theta S+\frac{(i\theta)^2}{2!}\mathbf{1}+\frac{(i\theta)^3}{3!}S+\ldots \\ &= \mathbf{1}\cos(\theta)+iS\sin(\theta)=R(\theta) \end{aligned}$$

$$\begin{matrix} R(\theta)|R\rangle=e^{i\theta}|R\rangle \\ L(\theta)|L\rangle=e^{i\theta}|L\rangle \end{matrix} \quad \Rightarrow |R\rangle, |L\rangle \text{ sind Eigenkets zum Drehoperator um } \hat{z} \text{ - Achse} \tag{1.9}$$

S Helizitätsoperator

$$\begin{aligned} (L_z) &=: \langle L_z\rangle_\psi \\ &=: \langle\psi|\hbar S|\psi\rangle \\ &=: \hbar\left(|\langle R|\psi\rangle|^2-|\langle L|\psi\rangle|^2\right) \end{aligned} \tag{1.10}$$

Zusammenfassung: Zustand wird beschrieben durch $|\psi\rangle\in\mathbb{C}^2$

• Physik. Größe (Photon-Drehimpuls L_z)	⇔	• Operator im Zustandsraum $(\hbar S)\ldots$ „Observable“
• Mögliche Messwerte $(L_z=\pm\hbar)$	⇔	• Eigenwerte $(\pm\hbar\ldots$ EW $\hbar S)$
• scharfer Messwert λ $(L_z=\pm\hbar$ z.B.$)$	⇔	• $|\psi\rangle$ Eigenvektor $|\lambda\rangle$ $(|\psi\rangle=|R\rangle)$
• Wahrsch. scharfer MW λ zu finden $(L_z=+\hbar$ z.B.$)$	⇔	• $W(\lambda)=|\langle\lambda|\psi\rangle|^2$ $(W(\hbar)=|\langle R|\psi\rangle|^2)$
• Mittelwert einer physik. Größe $(\langle L_z\rangle)$	⇔	• Erwartungswert eines Operators $(\langle\psi|\hbar S|\psi\rangle)$

Wdh: Operatoren O im Zustandsraum z.B. $\hbar S$

Eigenwerte λ [wirklich mögliche Messwerte], Eigenzustände $|\lambda\rangle$

Zustände $|\psi\rangle$ normiert $\langle\psi|\psi\rangle=1$

$W_\lambda(|\psi\rangle)=|\langle\psi|O|\psi\rangle|^2$ $\langle a|b\rangle=\langle b|a\rangle^*$

↓ Mittelwert $\langle O\rangle_\psi=\langle\psi|O|\psi\rangle$

spezieller Fall: für $O=|\lambda\rangle\langle\lambda|=P_\lambda$

denn: $\langle\psi|O|\psi\rangle=\langle\psi|\lambda\rangle\langle\lambda|\psi\rangle=|\langle\lambda|\psi\rangle|^2$

etwas lineare Algebra:

äußere Produkt (dyadisches Produkt) von 2 Vektoren

$$|\psi\rangle\langle\phi|\doteq\begin{pmatrix}\psi_x\\ \psi_y\end{pmatrix}(\phi_x^*,\phi_y^*)=\begin{pmatrix}\psi_x\phi_x^* & \psi_x\phi_y^*\\ \psi_y\phi_x^* & \psi_y\phi_y^*\end{pmatrix} \tag{1.11}$$

Bsp.:

$$|x\rangle\langle x|\doteq\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}(1,0)=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$$

$$|x\rangle\langle y|\doteq\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}(0,1)=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$$

$$|x\rangle\langle R|\doteq\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-i)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&-i\\0&0\end{pmatrix}$$

Zerlegung nach Basismatrizen

$$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\doteq a|x\rangle\langle x| + b|x\rangle\langle y| + c|y\rangle\langle x| + d|y\rangle\langle y|$$

„Assoziativität“

$$(|\psi\rangle\langle\phi|)|\theta\rangle=|\psi\rangle(|\phi\rangle\langle\theta|)$$

Folgerungen:

(i) $|\phi\rangle\langle\phi|\doteq P_\phi$ ist ein Projektionsoperator $(\text{falls}\langle\phi|\phi\rangle=1)$

$$P_\phi|\psi\rangle = |\phi\rangle\langle\phi|\psi\rangle \sim |\phi\rangle$$

$$P_\phi P_\phi = |\phi\rangle\langle\phi|\phi\rangle\langle\phi| = |\phi\rangle\langle\phi| = P_\phi \checkmark \tag{1.12}$$

(ii) Die Summe von Basisvektoren = Identität.

z.B.: $$|x\rangle\langle x|+|y\rangle\langle y| = \mathbf{1} = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} \tag{1.13}$$

(iii) Zerlegung eines Vektors:

z.B. $|\psi\rangle = \mathbf{1}|\psi\rangle = (|x\rangle\langle x|+|y\rangle\langle y|)|\psi\rangle = |x\rangle\langle x|\psi\rangle+|y\rangle\langle y|\psi\rangle = \psi|x\rangle+\psi|y\rangle$

(iv) Zerlegung eines Operators in Eigenbasis

z.B.: $$S = S\cdot\mathbf{1} = S\cdot\left(|R\rangle\langle R| + |L\rangle\langle L|\right) = +1|R\rangle\langle R| - 1|L\rangle\langle L|$$
$$= |R\rangle\langle R| - |L\rangle\langle L|$$
$$\doteq \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

e) Amplituden – Mechanik

$|\langle R|\psi\rangle|^2 = \text{W.}$, dass sich Photonen im Zustand $|\psi\rangle$ so verhält, als wäre es im Zustand $|R\rangle$

$W_\phi(|\psi\rangle) = |\langle\phi|\psi\rangle|^2$ Wahrscheinlichkeit (1.5)

$\langle\phi|\psi\rangle$ heißt (W.-)Amplitude $\left(\text{für} |\psi\rangle \text{ in } |\phi\rangle\right)$

totale W. $W_y(|x\rangle)$ eines x-Photons, einen y-Filter zu passieren:

mit Umweg über Zerlegung in zirkuläre Basis $(\langle R|L\rangle)$

$$\text{Amplitude} = \langle y|x\rangle = \langle y|\ \left(|R\rangle\langle R| + |L\rangle\langle L|\right)\ |x\rangle$$
$$= \langle y|R\rangle\langle R|x\rangle + \langle y|L\rangle\langle L|x\rangle$$

$$W_y(|x\rangle) = |\langle y|x\rangle|^2 = |\langle y|R\rangle\langle R|x\rangle + \langle y|L\rangle\langle L|x\rangle|^2$$
$$= |\langle y|R\rangle|^2\,|\langle R|x\rangle|^2 + |\langle y|L\rangle|^2\,|\langle L|x\rangle|^2 + \overbrace{\underbrace{\underbrace{\langle y|R\rangle}_{\frac{1}{\sqrt{2}}i}\underbrace{\langle R|x\rangle}_{\frac{1}{\sqrt{2}}}\underbrace{\langle y|L\rangle^*}_{\frac{1}{\sqrt{2}}i}\underbrace{\langle L|x\rangle^*}_{\frac{1}{\sqrt{2}}}}_{-\frac{1}{4}} + \underbrace{\underbrace{h.c.}_{\text{hermetisch konjugierte}}}_{-\frac{1}{4}}}^{\text{Interferenzterme}}$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right)$$
$$= 0 \checkmark$$

$$|x\rangle \underset{\text{W.}=\frac{1}{2}}{\overset{R}{\rightarrow}} |R\rangle \underset{\text{W.}=\frac{1}{2}}{\overset{y}{\rightarrow}} |y\rangle$$
$$\underset{L}{\ddots} \quad |L\rangle \quad \underset{y}{.\!\cdot\!\cdot}$$

f) Gemische

kombiniere einen monochromatischen Strahl aus 2 Quellen:

Qu. 1 emitiert nur Photonen in $|\psi_1\rangle$, mit Intensität L_1
Qu. 2 emitiert nur Photonen in $|\psi_2\rangle$, mit Intensität L_2

$\rightarrow$ mit $\text{W.} = P_1 = \dfrac{L_1}{L_1 + L_2}$ aus Qu 1 , mit $\text{W.} = P_2 = \dfrac{L_2}{L_1 + L_2}$ aus Qu 2

Was ist der Erwartungswert einer physik. Größe für solchen Lichtstrahl?

Antwort am Bsp. L_z :

$$\langle L_z \rangle = (+\hbar)\ \{\text{W. für}(+\hbar)\} + (-\hbar)\ \{\text{W. für}(-\hbar)\}$$

$$= (+\hbar)\ \Big\{\big(\text{W. für}|\psi_1\rangle\big)\cdot W_R\big(|\psi_1\rangle\big) + \big(\text{W. für}|\psi_2\rangle\big)\cdot W_R\big(|\psi_2\rangle\big)\Big\}$$
$$+ (-\hbar)\ \Big\{\big(\text{W. für}|\psi_1\rangle\big)\cdot W_L\big(|\psi_1\rangle\big) + \big(\text{W. für}|\psi_2\rangle\big)\cdot W_L\big(|\psi_2\rangle\big)\Big\}$$

$$= \hbar\ \{p_1|\langle R|\psi_1\rangle|^2 + p_2|\langle R|\psi_2\rangle|^2 - p_1|\langle L|\psi_1\rangle|^2 - p_2|\langle L|\psi_2\rangle|^2\}$$

$$= p_1\ \{\hbar|\langle R|\psi_1\rangle|^2 - \hbar|\langle L|\psi_1\rangle|^2\} + p_2\ \{\hbar|\langle R|\psi_2\rangle|^2 - \hbar|\langle L|\psi_2\rangle|^2\}$$

$$\overset{(1.10)}{=} p_1\langle\psi_1|\hbar S|\psi_1\rangle + p_2\langle\psi_2|\hbar S|\psi_2\rangle$$

$$=: p_1\langle L_z\rangle_1 + p_2\langle L_z\rangle_2 \quad \text{klassische Wahrscheinlichkeitsaddition} \tag{1.14}$$

Bemerkungen:

(i) allgemeiner Fall: Quantensystem ist mit $W_i\, p_i\ (i=1,\dots,n)$ $\Big|\sum_i p_i=1$
in einem von mehreren Zuständen $|\psi\rangle$

Dies heißt „gemischter Zustand“, besser: „Zustandsgemisch“

spezieller Fall: alle p_i außer einem sind Null $\rightarrow$ Quantensystem befindet sich in einem reinen Zustand $|\psi\rangle$

(ii) Superposition (reiner Zustand) $\alpha|\psi_1\rangle+\beta|\psi_2\rangle = |\psi\rangle$ mit $\langle\psi_1|\psi_2\rangle=0$ und $\langle\psi|\psi\rangle=0$ d.h. $|\alpha|^2+|\beta|^2=1$

Zerstören der Phasenkorrelation führt zu einem Gemisch

$$\{|\psi_1\rangle,\ p_1=|\alpha|^2\} \wedge \{|\psi_2\rangle,\ p_2=|\beta|^2\}$$

Bsp.:
$$\langle L_z\rangle_\psi = \big(\alpha^*\langle\psi_1| + \beta^*\langle\psi_2|\big)\ \hbar S\ \big(\alpha|\psi_1\rangle + \beta|\psi_2\rangle\big)$$
$$= |\alpha|^2\langle\psi_1|\hbar S|\psi_1\rangle + |\beta|^2\langle\psi_2|\hbar S|\psi_2\rangle + \alpha^*\beta\langle\psi_1|\hbar S|\psi_2\rangle + \alpha\beta^*\langle\psi_2|\hbar S|\psi_1\rangle$$

Mittelung über relative Phase φ von $\alpha^*\beta=(\alpha\beta)e^{i\varphi}$ liefert

$$\overline{\langle L_z\rangle_\psi} = |\alpha|^2\langle\psi_1|\hbar S|\psi_2\rangle + |\beta|^2\langle\psi_2|\hbar S|\psi_2\rangle$$
$$= |\alpha|^2\langle L_z\rangle_1 + |\beta|^2\langle L_z\rangle_2$$

Dieser Prozess heißt „Dekohärenz“.

(iii)Extremfall ist unpolarisiertes Lichtstrahl mit gleicher W. In jeden Polarisationszustand $|\phi\rangle$ $\big(\langle\phi|\phi\rangle=1\big)$

dies ist äquivalent zu einer einfacheren Beschreibung:

mit jeweils W.=0,5 in einem von zwei orthogonalen Polarisationszuständen $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle$

Demonstration am Bsp. $\langle L_z \rangle$: $\qquad \forall |\phi| = \alpha |\psi_1\rangle + |\psi_2\rangle$

$$\begin{aligned}
\langle L_z \rangle_{\text{unpol.}} &= \text{Mittlung von} \langle \phi | \hbar S | \phi \rangle \ \text{ über alle } \ |\phi\rangle \qquad \Big| \ |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \\
&= \text{Mittlung von} \langle L_z \rangle_{\alpha,\beta} \ \text{ über alle } \ \alpha, \beta \\
&= \text{Mittlung von} \langle L_z \rangle_{\alpha,\beta} \ \text{ über Phase } \ \varphi \ \text{ dann über } \ |\alpha|, |\beta| \\
&= \text{Mittlung von} \overline{\langle L_z \rangle_{\alpha,\beta}} \ \text{ über } \ |\alpha|^2, |\beta|^2 = \frac{1}{2} \langle L_z \rangle_1 + \frac{1}{2} \langle L_z \rangle_2
\end{aligned}$$

z.B.: $|\psi_1\rangle = |R\rangle \ ; \ |\psi_2\rangle = |L\rangle$

$$\langle L_z \rangle_{\text{pol.}} = \frac{1}{2}(+\hbar) + \frac{1}{2}(-\hbar) = 0$$

Wdh.: Gemisch $\quad p_i \quad i = 1, \dots, n \quad \sum_i p_i = 1$

Saubere Formulierung: Dichtematrix (Dichteoperator)

Trick: $\quad \mathrm{tr}\left[M \cdot |\psi\rangle \langle \phi| \right] \underset{\text{Basis}|x\rangle, |y\rangle}{\overset{\uparrow}{=}} \langle x | M | \psi \rangle \langle \phi | x \rangle + \langle y | M | \psi \rangle \langle \phi | y \rangle$ (Beispiel 2×2 Matrix)

$$\begin{aligned}
&= \langle \phi | x \rangle \langle x | M | \psi \rangle + \langle \phi | y \rangle \langle y | M | \psi \rangle \\
&= \langle \phi | \left(|x\rangle \langle x| + |y\rangle \langle y| \right) M |\psi\rangle
\end{aligned}$$

Vollständigkeitsrelation / Zerlegung der 1

$$= \langle x | M | \psi \rangle \tag{1.15}$$

Spezialfall:

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}[M] &= \mathrm{tr}[M \cdot \mathbf{1}] = \mathrm{tr}\left[M \left(|x\rangle \langle x| + |y\rangle \langle y| \right) \right] \\
&= \mathrm{tr}\left[M |x\rangle \langle x| \right] + \mathrm{tr}\left[M |y\rangle \langle y| \right] \\
&\overset{(1.15)}{=} \langle x | M | x \rangle + \langle y | M | y \rangle
\end{aligned}$$

betrachte Photonenstrahl gemischt aus $\left\{ \begin{matrix} |\psi_1\rangle & \text{mit} & \text{W.} = p_1 \\ |\psi_2\rangle & \text{mit} & \text{W.} = p_2 \end{matrix} \right\}$ wobei $\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle = 0 \ ; \ p_1 + p_2 = 1$

$\langle \psi_1 | \psi_1 \rangle = \langle \psi_2 | \psi_2 = 1 \rangle$

$$\begin{aligned}
\langle L_z \rangle &= p_1 \langle \psi_1 | \hbar S | \psi_1 \rangle + p_1 \langle \psi_2 | \hbar S | \psi_2 \rangle \\
&= p_1 \mathrm{tr}\left[\hbar S |\psi_1\rangle \langle \psi_1| \right] + p_2 \mathrm{tr}\left[\hbar S |\psi_2\rangle \langle \psi_2| \right] \\
&= \mathrm{tr}\left[\hbar S \left(p_1 |\psi_1\rangle \langle \psi_1| + p_2 |\psi_2\rangle \langle \psi_2| \right) \right] \\
&= \mathrm{tr}\left[\hbar S \cdot \rho \right]
\end{aligned}$$

mit $\quad \rho = p_1 |\psi_1\rangle \langle \psi_1| + p_2 |\psi_2\rangle \langle \psi_2| \quad$ Dichte-Matrix $\quad$ (1.16)

allgemein: $\langle O \rangle = \mathrm{tr}[O \cdot \rho]$ $\quad$ (1.17)

Eigenschaften: (1.18)

(i) $\operatorname{tr}\rho = p_1 + p_2 = 1$, $\operatorname{tr}\rho^2 = p_1^2 + p_2^2 \le 1$

(ii) $p_1 = 1$, andere $0 \rightarrow \rho = |\psi_1\rangle\langle\psi_1| = P_1 \rightarrow \rho^2 = \rho$

(iii) $\rho^2 = \rho \rightarrow exist|\psi\rangle$ so dass $\rho = |\psi\rangle\langle\psi| = P_\psi$

(iv) $\rho^\dagger = \rho$ hermetisch

(v) $\rho_{unpol.} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Achtung: im Allgemeinen ist ρ nicht diagonal !

Bsp.: in $|x\rangle, |y\rangle$ Basis $\rho \doteq \begin{pmatrix} p_1 & 0 \\ 0 & p_2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{in } |R\rangle, \langle L\rangle \text{ Basis}} \begin{pmatrix} \# & \# \\ \# & \# \end{pmatrix}$

g) Doppelbrechung

betrachte Calcit-Kristall, der selektiv aufspaltet

Brechungsindex n_o für Photonenpolarisation $\perp \vec{n}$ („ordinary“)
n_e für Photonenpolarisation $\parallel \vec{n}$ („extraordinary“)

Wahl: Strahl in z-Richtung, $\vec{n}$ in xy-Ebene

Polarisationsbasis: $|o\rangle, |e\rangle$ $\left(\text{wie } |x\rangle, |y\rangle\right)$

Phase von $E \sim e^{ikz - i\omega t}$ ω - fest [monochromatische Welle], $k = \frac{\omega}{c} \cdot n \rightarrow k_e < k_o$

Länge des Kristalls L $\rightarrow$ Vakuumlaufzeit $T = \frac{L}{c}$

zerlege $|\psi_{\text{in}}\rangle = |e\rangle\langle e|\psi_{\text{in}}\rangle + |o\rangle\langle o|\psi_{\text{in}}\rangle$

Effekt des Calcits: Muliplikation der Anteile $\sim|e\rangle$ und $\sim|o\rangle$ mit unterschiedlichen Phasen

$$|\psi_{out}\rangle = e^{ik_e L - i\omega T}|e\rangle\langle e|\psi_{\text{in}}\rangle + e^{ik_o L - i\omega T}|o\rangle\langle o|\psi_{\text{in}}\rangle$$

$$= e^{i\omega T} \cdot U_L|\psi_{\text{in}}\rangle \tag{1.19}$$

mit $U_z = e^{ik_e z}|e\rangle\langle e| + e^{ik_o z}|o\rangle\langle o|$ z.B.: $z = L$ (1.20)

Def.: Übergangsamplitude von $|\psi_{\text{in}}\rangle$ nach $|\phi\rangle$

$= $ Amplitude für $|\phi\rangle$ in $|\psi_{\text{out}}\rangle$

$= \langle\phi|\psi_{\text{out}}\rangle = \langle\phi|U_L|\psi_{\text{in}}\rangle$

dann: Übergangswahrscheinlichkeit von $|\psi_{\text{in}}\rangle$ nach $|\phi\rangle$

$= \left|\langle\phi|U_L|\psi_{\text{in}}\rangle\right|^2$

im Kristall Phasenänderung: $$|\psi_z\rangle = U_z|\psi_{\text{in}}\rangle \quad ; \quad 0 \le z \le L \tag{1.21}$$

$$|\psi_{z=0}\rangle = |\psi_{\text{in}}\rangle \ , \ |\psi_{z=L}\rangle = |\psi_{\text{out}}\rangle$$

2 wichtige Eigenschaften von U_z

(1) U_z ist multiplikativ, d.h.

$$U_{z+a}|\psi_{\text{in}}\rangle = |\psi_{z+a}\rangle \overset{!}{=} U_a|\psi_z\rangle = U_a U_z|\psi_{\text{in}}\rangle \qquad \text{(Komposition)} \tag{1.22}$$

Beweis: $$U_a U_z = \left(e^{i k_e a}\,|e\rangle\langle e| + e^{i k_o a}\,|o\rangle\langle o|\right)\left(e^{i k_e z}\,|e\rangle\langle e| + e^{i k_o z}\,|o\rangle\langle o|\right)$$

$$= e^{i k_e (z+a)}\,|e\rangle\langle e| + e^{i k_o (z+a)}\,|o\rangle\langle o| = U_{z+a} \quad \checkmark$$

falls $k_e a \ll 1$, $k_o a \ll 1$:

$$U_a \approx (1 + i k_e)\,|e\rangle\langle e| + (1 + i k_o a)\,|o\rangle\langle o|$$

$$= |e\rangle\langle e| + |o\rangle\langle o| + i a\left(k_e\,|e\rangle\langle e| + k_o\,|o\rangle\langle o|\right)$$

$$= \mathbf{1} + i\,a\cdot k \tag{1.23}$$

mit $K = k_e\,|e\rangle\langle e| + k_o\,|o\rangle\langle o|$ Wellenzahl-Operator (1.24)

$$\begin{pmatrix} \text{in } |e\rangle, |o\rangle \text{ - Basis:} \\ K \overset{!}{=} \begin{pmatrix} k_e & 0 \\ 0 & k_o \end{pmatrix} \end{pmatrix} \qquad \left[K = K^\dagger\right]$$

allgemeiner Zustand $|\psi\rangle = |e\rangle_{\psi_e} + |e\rangle_{\psi_o}$ hat keine dinierte Wellenzahl $\begin{pmatrix} \text{außer} & |\psi\rangle = |e\rangle \\ \text{oder} & |\psi\rangle = |e\rangle \end{pmatrix}$

Differentialgl. für $|\psi\rangle$ (und U_z)

$k\,a$ sei infinitesimal

$$|\psi_{z+a}\rangle \approx (\mathbf{1} + i\,a\,K)|\psi_z\rangle \rightarrow |\psi_{z+a}\rangle - |\psi_z\rangle \approx i\,a\,K|\psi_z\rangle$$

$$\lim_{a\to 0} \frac{1}{a}\cdot\left(|\psi_{z+a}\rangle - |\psi_z\rangle\right) = i\,K|\psi_z\rangle$$

$$\frac{d}{dz}|\psi_z\rangle = i\,K|\psi_z\rangle \underset{|\psi_z\rangle = U_z|\psi_{\text{in}}\rangle}{\Leftrightarrow} \frac{d}{dz}U_z = i\,K\cdot U_z \tag{1.25}$$

explizit in $|x\rangle, |y\rangle$- Basis

$$\frac{d}{dz}\langle x|\psi_z\rangle = i\langle x|K|\psi_z\rangle = i\langle x|K|x\rangle\langle x|\psi_z\rangle + i\langle x|K|y\rangle\langle y|\psi_z\rangle$$

$$\frac{d}{dz}\langle y|\psi_z\rangle = i\langle y|K|\psi_z\rangle = i\langle y|K|x\rangle\langle x|\psi_z\rangle + i\langle y|K|y\rangle\langle y|\psi_z\rangle$$

$$\frac{d}{dz}\begin{pmatrix} \psi_x \\ \psi_y \end{pmatrix}(z) = i\begin{pmatrix} K_{xx} & K_{xy} \\ K_{yx} & K - yy \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi_x \\ \psi_y \end{pmatrix}(z) \qquad \text{mit } K_{xx} = \langle x|K|x\rangle \quad \text{usw.}$$

Lösung der Dgl. mit Anfangswert $\left|\psi_{z=0}\right\rangle = \left|\psi_{\text{in}}\right\rangle$ bzw. $U_{z=0}=\mathbf{1}$

$$\left|\psi_z\right\rangle = e^{izK}\left|\psi_{\text{in}}\right\rangle \Leftrightarrow U_z = e^{izK} \tag{1.26}$$

check: $K = k_e\,|e\rangle\langle e| + k_o\,|o\rangle\langle o| \rightarrow e^{izk} = e^{izk_e}\,|e\rangle\langle e| + e^{izk_o}\,|o\rangle\langle o| = U_z$ ✓

(2) U_a ändert nicht die Norm von $\left|\psi_z\right\rangle$, d.h. $\left\langle\psi_{z+a}\middle|\psi_{z+a}\right\rangle = \left\langle\psi_z\middle|\psi_z\right\rangle = 1$

Wegen: $\left|\psi_{z+a}\right\rangle = U_a\left|\psi_z\right\rangle \overset{\text{h.c.}}{\rightarrow} \left\langle\psi_{z+a}\right| = \left\langle\psi_z\right|U_a^\dagger$

$$U_a^\dagger = e^{-izK^\dagger} = +e^{-izK} = U_{-z}$$

$$\left\langle\psi_z\middle|U_a^\dagger U_a\middle|\psi_z\right\rangle = \left\langle\psi_z\middle|1\middle|\psi_z\right\rangle = \left\langle\psi_z\middle|\psi_z\right\rangle \quad \forall\left|\psi_z\right\rangle \quad ✓$$

$$U_a^\dagger U_a=\mathbf{1} \qquad U_a \text{ ist unitär} \tag{1.27}$$

$$K=K^\dagger \qquad K \text{ ist hermetisch} \tag{1.28}$$

Test: $U_a \approx 1+iaK\ldots$